セゲー核の積による積分変換といくつかの関連した問題について (複素領域上の線型解析)

斎藤, 三郎

数理解析研究所講究録
366巻 1979年 111-129

セゲー核の積による積分変換といくつかの関連した問題について

群馬大学工学部　斎藤三郎

1. 序論

Gを平面上のN重連結 bounded regular region, $\{C_\nu\}_{\nu=1}^{N}$を境界成分, $H_2(G)$をG上の analytic な Hardy 族とする. $H_2^{\frac{1}{2}}(G)$を関数族$H_2(G)$からなり, 内積

$$(f(z), h(z)) = \int_{\partial G} f(z)\overline{h(z)}\,|dz|$$

を有する Hilbert 空間; すなわちセゲー空間とする. この空間における再生核を$\hat{R}(z, \overline{u})$とおく; すなわち,

$$f(u) = \int_{\partial G} f(z)\overline{\hat{R}(z, \overline{u})}\,|dz| \quad \text{for all } f \in H_2^{\frac{1}{2}}(G).$$

セゲー核$\hat{R}(z, \overline{u})$はuを固定$(u \in G)$したときzの関数として$\overline{G} = G \cup \partial G$上解析的であることが知られている. $\hat{L}(z, u)$をセゲー核に対する adjoint L-核とすれば, $\hat{L}(z, u)$は$\overline{G} - \{u\}$上解析的で, uで留数$1/2\pi$の simple pole をもち，次の重要な関係式を満たす：

$$\overline{\hat{K}(z,\overline{u})|dz|} = \frac{1}{i}\hat{L}(z,u)\,dz \quad \text{along } \partial G.$$

L－核はさらに次の極値問題の解として特徴付けられる：

$$\hat{K}(u,\overline{u}) = \int_{\partial G} |\hat{L}(z,u)|^2 |dz|$$

$$= \min_{\{h(z,u)\}} \int_{\partial G} |h(z,u)|^2 |dz|.$$

ただし，min は $\hat{L}(z,u)$ と同じ特異性をもち，$L_2(\partial G)$ 族に入る境界値をもつ meromorphic な関数族全体に対して考えられる．cf. [6].

ここでの目的のためにテンソル積 $H = H^{\frac{1}{2}}(G) \otimes H^{\frac{1}{2}}(G)$ を考える．$H^{\frac{1}{2}}(G)$ の $\overline{G}$ 上 analytic な complete orthonormal system $\{\Phi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ をとる．このとき，H の元は $G \times G$ 上 analytic な

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k}\,\Phi_j(z_1)\,\Phi_k(z_2)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |A_{j,k}|^2 < \infty$$

なる関数 $f(z_1, z_2)$ からなり，H は内積

$$(f, h)_H = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k}\,\overline{B_{j,k}}\;\Phi_j(z_1)\,\Phi_k(z_2)$$

のもとで Hilbert空間となる、cf. [1].

ここでの中心的な問題は $\rho \in L_p(\partial G)$ $(p>1)$ に対して ρ のセゲー核の2つの積による積分変換

$$F_\rho(z_1, z_2) = \int_{\partial G} \rho(z)\,\overline{\hat{R}(z, \bar{z}_1)\,\hat{R}(z, \bar{z}_2)\,dz}$$

を考え, H上の性質を論ずることである. この積分はセゲー核が order $\frac{1}{2}$ の differential であるから conformally invariant な形になっていることに注意しよう.

この問題の1つの副産物として, 有限 Dirichlet積分をもつ G 上の解析関数 $h(z)$ に対して次の等式が得られる:

$$(1.1)\quad \frac{1}{\pi}\iint_G |h'(z)|^2\,dxdy$$

$$= \int_{\partial G}\int_{\partial G} \left|(h(z_1)-h(z_2))\,\hat{C}(z_1, z_2)\right|^2 |dz_1|\,|dz_2|.$$

さらに $G\times G$ 上の2変数関数 $\hat{C}(z_1, z_2)$ は任意の非定数 $h(z)$ に対して $G\times G$ 上のある meromorphic functions の族のうちで上記の等式を成立させる関数として完全に特徴付けられることが証明される.

ここでの結果は Riemann 面上のセゲー型核や characteristics

をもつ（多価）セゲー核に対しても成立する[17]が，本質的な所を述べるためにセゲ核の場合に限っておく．

2．準　備

$W(z,t)$ を $t\in G$ に極をもつグリーン関数 $g(z,t)$ を実部にもつ meromorphic function とする．このとき，differential $i\,dW(z,t)$ は ∂G に沿って正である．$W(z,t)$ の零点を $\{t_\nu\}_{\nu=1}^{N-1}$ とし，これらはすべて simple とする．そうでない場合には簡単な修正を必要とするにすぎない．任意の実数 q と実数 p $(p\geqq 1)$ に対して $H_p^q(G)$ を有限 norm

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}|f(z)|^p\left(\frac{\partial g(z,t)}{\partial\nu}\right)^{1-qp}|dz|\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

をもつ G 上の解析関数 $f(z)$ からなる Banach 空間とする．ここで，$f(z)$ $(z\in\partial G)$ はファトウの境界値を意味し，$\partial/\partial\nu$ は内法線微分を表わすものとする．Hilbert 空間 $H_2^q(G)$ における再生核を $K_{q,t}(z,\bar{u})$ で表わす；すなわち，

$$\begin{aligned}f(u)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}f(z)\,\overline{K_{q,t}(z,\bar{u})}\left(\frac{\partial g(z,t)}{\partial\nu}\right)^{1-2q}|dz|\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}f(z)(dz)^q\,\overline{K_{q,t}(z,\bar{u})\,(dz)^q}\,[i\,dW(z,t)]^{1-2q}\end{aligned}$$

$$\text{for all } f(z) \in H_2^{q}(G).$$

$L_{q,t}(z,u)$ を $K_{q,t}(z,\bar{u})$ に対する adjoint L-核とすれば，これは u で留数 1 の simple pole をもつ以外は $\bar{G}$ 上解析的で，次の基本的な関係式を満たす：

$$(2.1) \quad \overline{K_{q,t}(z,\bar{u})(dz)^{q}}\,[\,i\,dw(z,t)\,]^{1-2q}$$

$$= \frac{1}{i} L_{q,t}(z,u)(dz)^{1-q} \quad \text{along } \partial G.$$

さらに次の関係式を満足する： $K_{q,t}(z,\bar{u}) = \overline{K_{q,t}(u,\bar{z})}$, $L_{q,t}(z,u) = -L_{1-q,t}(u,z)$. もちろん，$\hat{K}(z,\bar{u}) = K_{1/2,t}(z,\bar{u})/2\pi$, $\hat{L}(z,u) = L_{1/2,t}(z,u)/2\pi$ である．cf. [12, 13]

つぎに，$\rho \in L_p(\partial G)$ $(p>1)$ に対して次の分解が成立する (cf. [7, P. 81]) ことに注意しておく：

$$\rho(z) = h_1(z) \oplus \overline{\left(\frac{h_2(z)\,dz}{i\,dw(z,t)}\right)} \quad \text{on } \partial G,$$

$$h_1(z) \in H_p^0(G), \quad h_2(z) \in H_p^1(G).$$

ここで，$h_1(z)$ は ρ の $H_p^0(G)$ 上への projection になっている．したがって問題にしている積分変換 $F_\rho(z_1, z_2)$ は次のように変形される：

$$(2.2)\quad H_g(z_1, z_2) = \int_{\partial G} h_1(z)\, \overline{\hat{K}(z, \bar{z}_1)\hat{K}(z, \bar{z}_2)\, dz}$$

$$+ 2\pi \sum_{\nu=1}^{N-1} \overline{\left(\frac{h_2(t_\nu)}{w''(t_\nu, t)}\right)} \hat{K}(z_1, \bar{t}_\nu)\hat{K}(z_2, \bar{t}_\nu).$$

後で分かるように我々の問題に関して第2項は無視される．

$[H]_{D(0)}$ を $G\times G$ の対角線集合 D に沿って零となる H の部分空間とし，$([H]_{D(0)})^{\perp}$ をそれの H における直交補空間とする．部分空間 $[H]_{D(0)}$ の構造については [1] を参照．

次の2つの結果をここでの出発点としよう： Cf．[15]．

定理 A．任意の $f(z_1, z_2) \in H$ に対して，次の不等式が成立する：

$$(2.3)\quad \frac{1}{\pi}\iint_G |f(z, z)|^2\, dx\,dy$$

$$\leqq \min\left\{ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \varphi_j(z_1)\overline{\varphi_k(z_1)}|dz_1| \times \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \psi_j(z_2)\overline{\psi_k(z_2)}\,|dz_2| \right\}.$$

ここで，min は D に沿って $f(z, z) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z)\psi_j(z)$ を満たす $G\times G$ のすべての関数 $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z_1)\psi_j(z_2)$ $[\varphi_j, \psi_j \in$

$H_2^{\frac{1}{2}}(G)$] に対して考えられるものとする.

<u>定理 B.</u> $f(z_1, z_2) \in H$ に対して, 等式

$$\|f(z_1, z_2)\|_H^2$$

$$= \min\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \varphi_j(z_1)\overline{\varphi_k(z_1)}|dz_1| \times \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \psi_j(z_2)\overline{\psi_k(z_2)}|dz_2| \right\}$$

が成立する必要十分条件は $f(z_1, z_2)$ が $([H]_{D(0)})^{\perp}$ に属することである. ここで, min は定理Aにおけると同様に考えられる. (以下同様).

さらに, $f(z_1, z_2)$ が z_1 の関数と z_2 の関数の積と表わされ, かつ $([H]_{D(0)})^{\perp}$ に属するための必要十分条件は, $f(z_1, z_2)$ が適当な $u \in G$ と定数 C で $C\hat{R}(z_1, \bar{u})\hat{R}(z_2, \bar{u})$ の形に表わされることである.

3. 主要結果.

まず次の定理を得る:

<u>定理 3.1.</u> $\rho(z) \in L_p(\partial G)$ [$p > 1$] に対して, 積分

変換

$$F_\rho(z_1, z_2) = \int_{\partial G} \rho(z)\, \overline{\hat{R}(z, \bar{z}_1)\, \hat{R}(z, \bar{z}_2)\, dz}$$

がHに属するための必要十分条件は $\rho(z)$ の $H_p^0(G)$ 上への projection $h_1(z)$ が有限の Dirichlet 積分を有することである.

必要性の証明は定理Aと式(2.2)による. このとき, $\hat{L}(z,u)^2$ が留数をもたない ([2, P.118], [6]) という事実が重要な役割を果す. 十分性は, $\hat{R}(z_1, \bar{t}_\nu)\, \hat{R}(z_2, \bar{t}_\nu) \in H$ であるから

$$F_\rho^{(1)}(z_1, z_2) = \int_{\partial G} h_1(z)\, \overline{\hat{R}(z, \bar{z}_1)\, \hat{R}(z, \bar{z}_2)\, dz} \in H$$

を示せばよいことに注意する. パーセバルの等式を用いてそれを示すために

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\partial G} h_1(z)\, \overline{\Phi_j(z)\, \Phi_k(z)\, dz} \right|^2 < \infty$$

を示す. それは上記の積分を面積分に直してランダウの定理と定理Aを用いて証明される. このときさらに, $h_1(z)$ が有限の Dirichlet 積分をもてば $h_1(z)$ は $H_2^0(G)$ に属するとい

う事実（[1, P. 178], [5, P. 106]）を用いる．

この定理において，境界 ∂G 上の問題が種類の異なったDirichlet積分有限という概念に結び付いたことに特に注目しよう．

<u>系 3.1.</u> G 上の任意の解析関数 $h(z)$ に対して

$$h(z) \in H_2^0(G) \text{ かつ } \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{\partial G} h(z)\,\overline{\Phi_j(z)\,\Phi_k(z)\,dz}\right|^2 < \infty$$

であるための必要十分条件は $h_1(z)$ が有限 Dirichlet 積分をもつことである．

<u>系 3.2.</u> $F_\rho(z_1, z_2)$ が H に属するとき，$F_\rho(z_1, z_2)$ は同時に $([H]_{D(0)})^\perp$ に属する．

一般に $\hat{K}(z_1, \bar{u})\hat{K}(z_2, \bar{u})$ $[u \in G]$ は $([H]_{D(0)})^\perp$ に属することに注意する．証明は定理Aによる．

4. $([H]_{D(0)})^\perp$ の積分表示．

<u>定理 4.1.</u> 任意の $f(z_1, z_2) \in ([H]_{D(0)})^\perp$ は唯1つに定まる $h(z) \in H_2^1(G)$ によって次の積分に表わされる：

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{h(z)\,dz\ \overline{\hat{R}(z, \bar{z}_1)\hat{R}(z, \bar{z}_2)\,dz}}{i\,dW(z, t)}$$

さらに $h(z)$ は次のように $f(z, z)$ で表わされる：

$$h(z) = -W'(z, t)\left[\int_t^z \left(\sum_{\nu=1}^{N-1} X_\nu(f)\,\hat{L}(\zeta, t_\nu)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(\zeta, \zeta)\right) d\zeta\right].$$

ここで，定数 $X_\nu(f)$ は次の方程式の解として定められる：

$$\sum_{\nu=1}^{N-1} X_\nu(f) \int_{C_\mu} \hat{L}(\zeta, t_\nu)\,d\zeta = -\int_{C_\mu} f(\zeta, \zeta)\,d\zeta,$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, N-1.$$

$\{X_\nu(f)\}$ が定まることは，行列

$$\left\| \int_{C_\mu} \hat{L}(\zeta, t_\nu)\,d\zeta \right\|$$

の正則性（[13], [14]）による．$h(z)$ の一意性は，$\{\hat{R}(z, \bar{u})^2 | u \in G\}$ の $H_2'(G)$ における完全性 [14, 定理 5.1] による．

この定理において，純粋なセゲー核関数の理論に自然な形

で，ルヂン核や共役ルヂン核の理論 [12, 13, 14] が結合した事実に注意したい．

系 4.1. $f(z_1, z_2) \in ([H]_{D(0)})^{\perp}$；すなわち，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G} \frac{h(\zeta)d\zeta\,\overline{\hat{R}(\zeta, \bar{z}_1)\hat{R}(\zeta, \bar{z}_2)d\zeta}}{i\,dw(\zeta, t)}$$

が z_1 の関数と z_2 の関数の積になるための必要十分条件は，$h(\zeta)$ が適当な $u \in G$ と定数 C によって $CK_{1,t}(\zeta, \bar{u})$ と表わされることである．

証明には定理 B の後半が用いられる．

この定理は核関数の族 $\{CK_{1,t}(\zeta, \bar{u}) \mid u \in G\}$ に対する新しい特徴付けを与える．Cf. [18]．

系 4.2. Bergman norm 有限な G 上の任意の解析関数 $f(z)$ に対して G 上 $F(z, z) = f(z)$ となる H の関数で $\|F(z_1, z_2)\|_H$ を最小にする極値関数は唯 1 つ存在して，それは $([H]_{D(0)})^{\perp}$ に属する．

さらに極値関数は定理 4.1 におけるように $f(\zeta, \zeta)$ を $f(\zeta)$ と置き換えた形に表わされる．

系 4.3. 関数 $f(z_1, z_2) \in H$ に対して，不等式(2.3)において2つの等号が同時に起きる；すなわち，

$$\frac{1}{\pi}\iint_G |f(z, z)|^2 \, dx\, dy$$

$$= \|f(z_1, z_2)\|_H^2$$

であるための必要十分条件は $f(z_1, z_2)$ が

$$2\pi \hat{C}(z_1, z_2)\left[F(z_1) - F(z_2)\right]$$

と表わされることである．ここに，$F(z)$ は $f(z, z)$ の原始関数である．

不等式(2.3)において前半の等号が成立する必要十分条件は $f(z, z)\,dz$ が exact であること[16]と定理4.1の表現を用いてこの系は得られる．これからまた $\hat{C}(z_1, z_2)$ の2変数関数としての特徴付けが直ちに得られる．

次の知られている事実（cf. [4], [20]）の別証も簡単に得られる：

系 4.4. G 上の解析関数 $h(z)$ が有限の Dirichlet 積分をもつ必要十分条件は $(h(z_1)-h(z_2))/(z_1-z_2)$ が H に

属することである.

証明は $\hat{\ell}(z, u) = \hat{L}(z, u) - 1/2\pi(z-u)$ の $\overline{G}\times\overline{G}$ 上の解析性[19] と $f(z_1, z_2) \in H$ であるための必要十分条件は

$$\int_{\partial G}\int_{\partial G} |f(z_1, z_2)|^2 |dz_1||dz_2| < \infty$$

であること(cf. [3])を用いて等式(1.1)を用いればよい。

5. 問題

以下, ここで論じたことに関連している問題をいくつかまとめておこう.

問題 1. 単位円 D 上の有限 Dirichlet 積分をもつ調和関数に対して Douglas [4] は次の不等式を示している:

$$\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\, dx dy$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{\partial D}\int_{\partial D} \left| \frac{u(z_1) - u(z_2)}{z_1 - z_2} \right|^2 |dz_1||dz_2|$$

この等式は (1.1) と非常に似ているが, 一般の regular region に対してこの型の等式が成立するであろうか. ある

いは両辺の大小関係があるであろうか．単位円の場合ですら $1/(z_1 - z_2)$ の核関数の理論による意味づけは与えられていないが，何かあるのだろうか．—— この等式自身はもちろん我々の結果 (1.1) からも直ちに得られる．

問題 2.

(i)
$$F_\rho(z_1, z_2, z_3) = \int_{\partial G} \rho(z)\, \overline{\hat{K}(z,\bar{z}_1)\hat{K}(z,\bar{z}_2)\hat{K}(z,\bar{z}_3)}\, dz$$
$$\in H^{\frac{1}{2}}(G) \otimes H^{\frac{1}{2}}(G) \otimes H^{\frac{1}{2}}(G)$$

となる ρ の条件は何か．3つの積以外にも一般にこの型の問題が考えられる．

(ii) G 上の Bergman 核 $K(z,\bar{u})$ と Bergman space $B(G)$ (cf. [2]) に対して
$$F_\rho(z_1, z_2) = \iint_G \rho(z)\, \overline{K(z,\bar{z}_1)\, K(z,\bar{z}_2)}\, dx\,dy$$
$$\in B(G) \otimes B(G)$$

となるための ρ の条件は何か，また，多変(数)関数の場合も含めていろいろな再生核についても同様の問題が考えられる．

しかし，G 上の重さのついたセゲー核 $\hat{K}_\rho(z,\bar{u})$（cf. [9]，[10]）に対して

$$\text{(iii)}\quad F_\rho(z_1,z_2)=\int_{\partial G}\rho(z)\,\overline{\hat{K}_{\rho_1}(z,\bar{z}_1)\,\hat{K}_{\rho_2}(z,\bar{z}_2)\,dz}$$

$$\in H_2^{\frac{1}{2}}(G)\otimes H_2^{\frac{1}{2}}(G)$$

となるための $\rho(z)$ の条件を求めことは特に興味あることに思われる．特に系 3.2 が一般に成立するか否かが興味深い点となろう．—— 単連結の場合にはこれらは実験可能である．また，$\rho_1(z)\,\rho_2(z)$ が ∂G 上定数である場合には解決している [17]．

問題 3． adjoint L－核の2変数関数としての特徴付けが，セゲー核以外の場合にも存在するか．特に Bergman 核の場合どうか．

問題 4． 定理Aは $f(z_1,z_2)\in H_2^{\frac{1}{2}}(G)\otimes H_2^{\frac{1}{2}}(G)$ に対して

$$\iint_G |f(z,z)|^2\,dx\,dy<\infty$$

を示しているが，いろいろな直積空間の対角線集合に沿って

の制限が属する空間を具体的な形で見い出せ。Bergman space や調和関数の場合についてはどうなるか。

問題 5. 定理3.1の証明は global な議論でセゲー核であることの特殊性を本質的に用いている。何か別証はないか。局所的な議論は singular integral の理論に結びつくが、それに成功すれば問題2に対する展望が拓かれると思われる。

問題 6. $\hat{K}_\rho(z, \bar{u})$ を G 上の重さ ρ のついたセゲー核とすると G 上の Bergman 核 $K(z, \bar{u})$ と次の恒等式が成立する：

$$K(z, \bar{u}) = 4\pi\, \hat{K}_\rho(z, \bar{u})\, \hat{K}_{\rho^{-1}}(z, \bar{u}) + \sum_{\nu=1}^{N-1} \sum_{\mu=1}^{N-1} C^{(\rho)}_{\nu,\mu}\, \overline{Z_\nu(u)}\, Z_\mu(z).$$

ここに $\{C^{(\rho)}_{\nu,\mu}\}$ は定数であり、$\{Z_\nu(z)dz\}_{\nu=1}^{N-1}$ は ∂G に沿って real な analytic differentials の basis である。Cf. [9], [10].

(i) $\| C^{(\rho)}_{\nu,\mu} \|$ は positive definite か negative definite か

に分かれるか．もしそうならば，かくなる ρ の特徴付けは何か．

(ii) $\rho \equiv 1$ のとき，$\|C^{(\rho)}_{\nu,\mu}\|$ は positive definite であることが D. A. Hejhal [8] によって Riemann theta function の理論を用いて証明されているが，この重要で (cf. [15]) 深い命題の初等的な証明はないか．あるいはとにかく別証はないか．

(iii) $\rho(z) = \partial g(z,t)/\partial\nu$ のとき，$N=2$ に対して $\|C^{(\rho)}_{\nu,\mu}\|$ は negative definite であることが実験的に確かめられている ([15], [21]) が，一般にも成立すると思われる．このいくつかの意味については [15] 参照． —— なお，exact な Bergman 核の場合については対応する問題は完全に解決されている ([14] and cf. [17])．

REFERENCES

1. N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68(195), 337-404.

2. S. Bergman, The kernel functions and conformal mapping, Amer. Math. Soc. Survey (1970).

3. H. J. Bremermann, Holomorphic continuation of the kernel function and the Bergman metric in several complex variables, ed. W. Kaplan et al, University of Michgan Press., Ann Arbor 1955, 349-383.

4. J. Douglas, Solution of the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 33(1931), 263-321.

5. P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Pure and Appl.Math., Vol. 38, Academic Press., New York, 1970.

6. P. R. Garabedian, Schwarz's lemma and the Sezgö kernel function, Trans. Amer. Math. Soc. 67(1949), 1-35.

7. M. Heins, Hardy classes on Riemann surfaces, Lecture Notes in Mathematics, No. 98, Springer-Verlarg, Berlin, 1979.

8. D. A. Hejhal, Theta functions, kernel functions and Abelian integrals, Mem. Amer. Math. Soc. 129(1972).

9. Z. Nehari, A class of domain functions and some allied extremal problems, Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950), 161-178.

10. ————, On weighted kernels, J. Analyse Math. 2(1952), 126-149.

11. M. Parreau, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et la analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Ann. Inst. Fourier 3 (1951), 103-197.

12. S. Saitoh, The kernel functions of Szegő type on Riemann surfaces, Kōdai Math. Sem. Rep. 24(1972), 410-421.

13. ————, On some completenesses of the Bergman kernel and the Rudin kernel, Pacific J. Math. 56(1975), 581-596.

14. ————, The exact Bergman kernel and the kernels of Szegö type,

Pacific J. Math. 71(1977), 545-557.

15. ———— , The Bergman norm and the Szegö norm, Trans. Amer. Math. Soc. 249(1979), 261-279.

16. ———— , Approximation of the Bergman norm by the norms of the direct product of two Szegö spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 75(1979), 226-230.

17. ———— , The Dirichlet norm and the norm of Szegö type, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

18. ———— , 核関数をもつHilbert空間の直積における極値問題, 数理解析研究所講究録 323 (1978), 39—64.

19. V. Singh, An integral equation associated with the Szegö kernel function, Proc. London Math. Soc. (3)(1960), 376-394.

20. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press., Princeton, New Jersey, 1970.

21。 山田 陽, Theta functions と domain functions の関係, 数理解析研究所講究録 323 (1978), 84—101.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF ENGINEERING, GUNMA UNIVERSITY
1-5-1, TENJIN-CHO, KIRYU 376, JAPAN